

**ЕЛЕКТРОНСКО ОБРАЗОВАЊЕ У МЕТОДИЦИ МАТЕМАТИКЕ  
ELECTRONIC EDUCATION IN THE METHODOLOGY OF MATHEMATICS**

Душко Парезановић, Љубица Диковић, Миленко Пикула, Крстивоје Шпијуновић

**РЕЗИМЕ:** Развој савремених технологије и усавршавање наставних средстава дају нове могућности и нов квалитет настави математике. У раду се наглашава разлика између традиционалне наставе (методички троугао) и савремене наставе обogaћене технологијама (методички тетраедар). Најпре се анализирају циљеви математичког образовања, поткрепљени примерима, а потом се презентују нови трендови и технологије у савременој настави математике. Циљ рада је да укаже на постојеће електронске математичке ресурсе прилагођене узрасту нижих разреда основне школе и покаже да учење математике може бити забавније и флексибилније у односу на традиционалан приступ. У раду је приказана серија примера намењена развоју логичког мишљења ученика математике млађих разреда основне школе.

**КЉУЧНЕ РЕЧИ:** електронско образовање, методика математике, Интернет

**ABSTRACT:** Development of contemporary technologies and improvement of educational means provide better possibilities and new quality of mathematics teaching. This study points out the difference between traditional teaching (methodical triangle) and technologically enriched contemporary teaching (methodical tetrahedral). At first, the aims of mathematics teaching are analyzed, with the given examples, following that new trends and technologies in contemporary mathematics teaching are presented. The study objective is to point out the existent electronic mathematical resources adjusted to the age of children attending primary school lower levels and to demonstrate that learning mathematics can be funnier and more flexible comparing to the traditional approach. The study shows a range of examples intended for the development of logical thinking in lower grades pupils.

**KEY WORDS:** electronic education, methodology of mathematics, Internet

**1. МЕТОДИКА НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ**

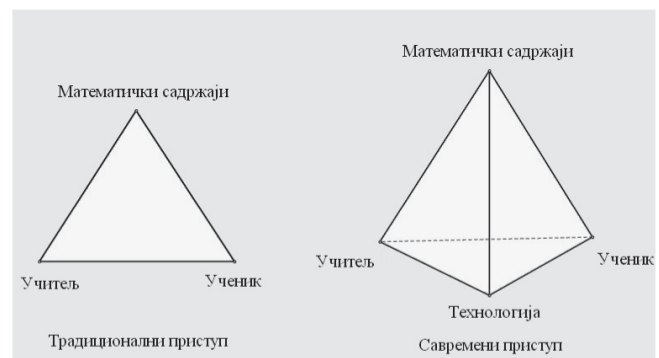
Процесом интеграције, повезивањем одабраних делова дидактике и математике настала је дидактичко-математичка научна област методика наставе математике [1].

Научноистраживачку дисциплину која изучава појаве и процесе, који се јављају, или се могу јавити на било ком степену математичког образовања, називамо методиком наставе математике. Три главна подручја истраживања су развој и примена курикулума, облици и методе учења и подучавања математике и вредновање постигнућа резултата учења [7].

Сам назив методика потиче од грчке речи методос (μέθοδος), што значи поступак, начин, пут. Стога је задатак методике наставе математике да открије законе процеса обучавања математике и да понуди конкретне, што успешније, поступке излагања математичких садржаја. Тај посао није нимало лак, јер методика наставе математике, као ниједна друга научна дисциплина, у свом предмету уједињује на први поглед чак изразито различите научне области. Она премешћује јаз између хуманоамбијенталних услова и високо технолошких достигнућа, психолошко-социолошких карактеристика одређеног узраста и владајућих филозофско-идеолошких праваца, формалних логичких закона и мотивацијских проблема, те све богатијих чисто математичких садржаја и педагошких норми.

Може се рећи да је савремена настава математике испланиран, двосмерни процес у којем се врши преношење математичких знања са наставника на ученике, побуђује и поспешује математичко самообразовање ученика, са сврхом њиховог оспособљавања за самостално и успешно

сналажење у животном окружењу. У том смислу се ставља акценат на свесност потребе и значаја учења математике, на потребу активног учења и уочавање конкретне практичне примењивости стечених знања. Развој савремених технологије и усавршавање наставних средстава дају нове могућности и нов квалитет настави. Сликвито је традиционална настава представљана методичким троуглом. У савременој настави додајемо још једну димензију, па тако добијамо методички тетраедар (слика 1.). [7]



Слика 1. – Методички троугао и тетраедар

**2. ЦИЉЕВИ МАТЕМАТИЧКОГ ОБРАЗОВАЊА**

Полазни појам у методици наставе математике је циљ математичког образовања. Под циљем подразумевамо замишљено стање које желимо постићи код ученика применом одређених активности средстава и садржаја.

Тако је општи циљ математичког образовања да код ученика развије способности правилног, критичког мишљења, да му пружи неопходан математички апарат потребан у делатности за коју се ученик припрема и да га упуту, како самосталном коришћењу литературе и самообразовања, тако и одговорности и конструктивности у колективном раду.

Посебни циљеви су да полазник развије оне способности и стекне она знања која су предвиђена одређеном наставном јединицом или неком одређеном математичком облашћу. Оба ова циља прожета су стручно образовним и васпитно образовним циљем. Први је везан за чисто стручна математичка сазнања, а други за стицање особина, знања и навика које утичу на изградњу осталих социјално-психолошких особина личности ученика.

Под математичким појмом се подразумева мисаона апстракција заједничких особина за групу објеката, појава или односа међу њима, која се користе у математици. При томе говоримо о обиму појма, као скупу објеката које тај појам обухвата и садржају појма, као скупу свих карактеристичних особина појма. Ако је обим појма Б садржан у обиму појма А, кажемо да је А родни појам за Б, односно да је Б врсни појам појма А. Такође говоримо о основним и изведеним појмовима. Основни математички појмови су они који се не дефинишу (скуп, тачка, права,...). Процес њихове изградње пролази кроз следеће фазе: посматрање објекта или појаве, уочавање заједничких особина, формирање представе, именовање и симболичко записивање. Изведени математички појмови су они који се дефинишу помоћу минималног броја основних математичких појмова или других претходно изведених појмова. Битне карактеристике појма у дефиницији морају бити неопходне и довољне. У зависности од приступа дефиницији издвајамо три врсте дефиниција.

1. Карактеристичним дефиницијама појам се дефинише преко најближег родног појма и посебне одређујуће особине која га разликује од осталих садржаја тог појма. Пример такве дефиниције је дефиниција ромба. Ромб је паралелограм који има једнаке странице.
2. Генетичким дефиницијама се уводи појам начином његовог настанка. Као пример може послужити дефиниција целих алгебарских израза:
  - Ознаке констаната и променљивих су цели алгебарски изрази.
  - Ако су  $A$  и  $B$  цели алгебарски изрази, онда су и  $A + B$ ,  $A - B$  и  $A \cdot B$  цели алгебарски изрази.
  - Цели алгебарски изрази се могу добити једино коначном применом претходна два правила.
3. Дескриптивним дефиницијама се уводи појам описивањем његових одређујућих особина. На при-

мер: Тетраедар је геометријска фигура ограничена са четири троугла који два по два имају заједничку страницу.

Реч или група речи којима се појам именује назива се **термин**. Исти појам се у различитим језицима по правилу назива различитим именима (терминима). Чак, шта више, у истом језику одређен појам може бити именован са више различитих термина. Веома је често поистовећивање појма и термина, зато треба посебно нагласити њихову разлику.

До откривања математичких истина долази се на различите начине. Управо из њиховог значаја у математици проистиче и значај употребе и упознавања облика математичког расуђивања и у настави математике. Наведимо неколико издиференцираних карактеристичних поступака у математичком закључивању.

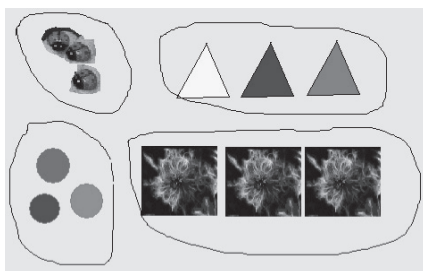
**Аналогија** као облик мисаоног закључивања представља поступак при коме се о особинама неког објекта просуђује на основу сличности са особинама познатог објекта. Јасно је да овакав вид закључивања није строг јер подударане објеката на делу својстава не повлачи нужно и њихово подударане на другим својствима. Стога се може доћи и до погрешних закључака. Ипак то не умањује значај аналогије, јер је она плодна у смислу постављања хипотеза које се касније могу доказати или оповргнути сигурнијим облицима закључивања. Веома плодне резултате применом аналогије добио је Ојлер. То су рецимо решавање једначине четвртог степена по аналогији са Вијетовим решењем једначине трећег степена, Ојлерова формула за полиедре и сума реда  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$  итд. Примери Ојлерових аналогија су један од најбољих начина мотивисања младих ка истраживачком раду.

**Анализа и синтеза** су две научне методе које чине методолошко јединство супротности па се често надовезују и чине јединствену аналитичко-синтетичку методу. Анализом се посматрани проблем рашчлањује на делове, изучавају се делови и изводи закључак о целини. Анализа се обично завршава кад се установи веза између постављеног проблема и познатих чињеница. Тада прелазимо на синтезу обратним поступком извођења потеза. Стога се често каже да је анализа метода решавања унатраг или извођење од краја ка почетку. Најчешћи и најкарактеристични примери примене аналитичко-синтетичке методе су у конструктивним задацима у геометрији, доказивању неједнакости, решавању једначина са параметром, применама делјивости у проблемима теорије бројева итд.

**Генерализација и специјализација** чине још једно двојство супротних начина закључивања у математици. У генерализацији (уопштавању) се прелази са разматрања особина одређеног скупа објеката на разматрање његовог надскупа. Специјализација пак представља прелаз са разматрања особина неког скупа на разматрање његовог подскупа. Генерализацијом се изграђују општији појмови и општија тврђења док се специјализацијом учвршћује

унутрашња структура датог скупа математичких објеката. Карактеристичан пример генерализације у настави геометрије су уопштења Питагорине теореме: косинусна теорема, Питагорина теорема за правоугле тетраедре... У алгебри и анализи најчешћа су уопштења у прелазима са особина скупа природних бројева у целе, са целих у рационалне итд. Леп пример специјализације је у трансформацијама и применама Херонове формуле за површину троугла. Наиме, формула  $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , где је  $s = \frac{a+b+c}{2}$  ознака полуобима, није баш погодна у случајевима када су странице троугла изражене ирационалним бројевима. Једнаоставном алгебарском трансформацијом може се из претходне формуле добити и формула  $P = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2}$ . Генерализација је уско повезана са аналогијом и по правилу аналогија претходи генерализацији. Специјализација недвосмислено доводи до тачних резултата, док генерализација може дати и нетачан закључак, стога је потребно генерализоване ставове проверити и доказати. Потребно је ове видове математичког закључивања комбиновати како због истицања њихових особина, тако због избегавања монотоности у раду.

**Апстрактација и конкретизација** су следећи пар супротних начина изучавања математичких објеката и појава. Конкретизацијом се просуђује о реалним појединачним особинама неког објекта. Апстрактацијом се пак слично генерализацији посматрани објект и његова посматрана особина издваја из осталих својстава и добија ванпредметан мисаони садржај. Математика је у свом настајању конкретна и индуктивна. Изучавања Египћана и Вавилонца се односе на стварне појединачне објекте. Већ Питагора разматра апстрактне геометријске објекте а и појам броја је код њега апстрактан. Јединство апстрактације и конкретизације у настави се примењује већ у почетној настави математике. У изградњи појма природног броја ученицима се конкретно представљају коначни скупови различитих елемената са истим бројем елемената те се на основу тога изграђује појам о том конкретном броју (слика 2.). [7]



Слика 2. – Формирање појма броја 3

Основна правила на којима треба да се заснива ефикасна настава називамо **математичким принципима**. Неки од главних наставних принципа су:

1. Принцип примерености
2. Принцип научности наставе
3. Принцип систематичности

4. Принцип свесности и активности
5. Принцип очигледности
6. Принцип трајности знања
7. Принцип економичности и рационализације
8. Принцип индивидуалног прилажења ученицима
9. Принципом повезаности теорије са праксом
10. Принцип историчности и савремености
11. Принцип проблемности

### 3. NOVI TRENDOVI I TEHNOLOGIJE U SAVREMENOJ NASTAVI MATEMATIKE

Савремена психологија, педагогија и социологија је данашњу генерацију ученика у основној и средњој школи назвала тзв. Нет или Интернет генерацијом. Нет генерација је рођена у време настајања Интернет феномена, односно одрастала уз рачунар, развој нових технологија и експанзију Интернета.

Како је широко прихваћено да су информационе технологије промениле начин како живимо, радимо, учимо и привређујемо, у раду се посебно анализира утицај технологија на ученика математике новог, дигиталног доба. Специјално, у раду се презентује утицај технологија на развој логичког мишљења ученика математике млађих разреда основне школе.

Неке карактеристике ученика и студената Нет генерације су: гравитирање ка групним (тимским) активностима, нова уверење о вредновању знања („бити паметан је cool“), фасцинираност новим технологијама и колаборативни стил рада (Oblinger, D. (2004).)

Када говоримо о студентима, студија (Jones, S., 2002) је показала да је Интернет позитивно утицао и на стицање академског знања код 79% студената. Скоро половина је потврдила да им е-маил помаже да квалитетно изразе своје идеје које размењују са професором, које никад не би биле реализоване на класичном часу. Већина студената је тада потврдила да Интернет користе као примарно средство за комуникацију са пријатељима.

Колаборативно учење базирано на Вебу допушта асинхроне активности (блог, портали, вики, форуми) које по потреби обезбеђују флексибилност учења, као и синхроне активности (Learning Management System - LMS, чет-сеције, виртуелне учионице или видео конференције).

Мобилност је постала важна карактеристика – студенти су константно у покрету, између часова, рада или дружења (Metcalf, 2007). Данашња генерација студената (узраста 18-22) тежи експерименталном учењу – они радије бирају учење кроз рад, што је супротно традиционалном концепту – да пасивно слушају и уче. Међу њима, 20% је започело коришћење компјутера између 5 и 8 године (Jones, 2002). Затим, студенти су комуникацијски оријентисани. Пријатељства, дружење, као и учешће у виртуелним заједницама постало је необично важно. Мобилно

учење (m-learning) и учење преко мреже (online learning) су два подскупа електронског учења (e-learning). Сва три скупа припадају учењу на даљину. [14]

Мешовито учење (blended learning), најчешће се дефинише као извођење образовних програма делимично он-лине уз помоћ Интернета, а делимично на традиционалан начин уживо. Циљ мешовитог учења је да се удруже најбоље особине учења у разреду са најбољим елементима он-лине учења, те да се тако постигне активно учење студената, уз истовремено смањење времена које проведу у разреду. Хибридни модел наставе се предвиђа као модел наставе у будућности.

Свакако, карактеристике квалитетног Веб-базираног учења и подучавања јесу ученички-центрирани и ученички-контролисани системи, који подстичу активно учешће, конструкцију знања, базирани на вишим нивоима вештина мишљења - анализа, синтеза и евалуација. Веб-базирано учење и подучавање промовише активно учење, омогућава групну сарадњу и кооперативно учење, обезбеђује вишеструке нивое интеракције и фокусирано је на реалан-живот и решавање проблема.

Циљ је користити технологију у настави која треба да обезбеди окружење за активно истраживање математичких структура кроз вишеструке репрезентације, односно да ученицима омогући неке математичке аспекте који нису доступни коришћењем само папира и оловке. Ученици се могу концентрисати на идеје; додатно, компјутери могу стимулисати код ученика развој геометријске интуиције, кроз интересантне визуелизације у 2Д или 3Д простору. (Dikovic, 2007)

У том смислу, GeoGebra представља добар избор за тзв. Кооперативно учење, односно групно решавање проблемских задатака у малим групама, интерактивну наставу или индивидуалну/групну презентацију ученика. GeoGebra стимулативно делује на наставнике да користе технологију за: визуелизацију математике; математичка истраживања; интерактивне часове математике; примену математике итд. (Dikovic, 2009)

#### 4. ПРИМЕРИ МОГУЋЕ УПОТРЕБЕ ИНТЕРНЕТА У ЦИЉУ РАЗВОЈА ЛОГИЧКОГ МИШЉЕЊА ДЕЦЕ ШКОЛСКОГ УЗРАСТА

„При обучавању деце неопходно је тежити к томе да се код њих постепено сједињује знање са умењем. Изгледа да је од свих наука једино математика способна да у потпуности задовољи овај захтев“, И. Кант.

Један од важних задатака математике јесте да помаже развоју логичког приступа процедурама и аргументима, помаже учовавању правилности и развија способности за рачунање, процену и логичко расуђивање.

Оно на чему инсистира сваки учитељ, наставник и професор математике јесте развој логичког мишљења. Поред

стандардно креираних наставних једница које се користе у пракси, паралелно се могу користити ресурси тзв. рекреационе математике.

Кроз серију занимљивих задатака који ће се генерисати неким тестом или квизом, било са мултимедијалног цд-а или путем Интернета, може се на занимљив начин и уз групне технике рада развијати и јачати логичко мишљење. Математика треба да буде интелектуални изазов за ученике кроз који ће се они самопотврђивати. Задаци за основну школу су такви да већину могу да ураде сви ученици, са мање или више напора. Ипак, решење сваког задатка тражи интелектуални напор, а у тренутку када ученик реши задатак, он на неки начин добија потврду своје интелектуалне вредности. Овакав начин рада треба да развија код ученика такмичарски дух, на тај начин што се деца такмиче ко ће боље да реши постављене задатке, а тиме се подиже ниво знања у одељењу.

Позната су питања за развој логичког мишљења типа: „4 човека су играла шах 4 сата. Колико је сати играо сваки од учесника? Сваки штап има 2 краја. Колико крајева има штап и по? 10 вагона воза прешло је 100 km. Колико је километара прешао сваки вагон? Штап треба поделити на 6 делова. На колико места треба пресећи штап? Свака од 3 сестре има брата. Колико у тој породици има деце?...“ [8]

Такође, могу се користити логички задаци нумерације и пребројавања типа: „Колико се пута употреби свака цифра за писање двоцифрених бројева?“ Кроз групни рад и анализу задатка долази се до одговора да се нула употреби на месту јединица по једном у свакој десетици (9 пута), а остале цифре се употребе на месту јединица по једанпут у свакој десетици (9 пута) и на месту десетица које почињу том цифром (10 пута), укупно 19 пута. Или, „Колико се може написати различитих четвороцифрених бројева стављајући умесо звездица цифре 3\*4?“ Употребом компјутерске анимације, може се на визуелан начин анализирати и решавати проблем: На место прве звездице може се ставити свих 10 цифара, као и на место друге звездице. Дакле, може се написати 10\*10 одн. 100 четвороцифрених бројева. Потребно је обезбедити такве форме презентовања градива да се математика приближи детету, форме које дете подсећају на игру, које су занимљиве и мултимедијалне, уз помоћ различитих и пажљиво одабраних софтверских решења. Пожељно је, добрим избором задатака, доводити ученике у ситуацију да искажу своју креативност. Инсистирањем на анализи поставке и решења дете се ставља у улогу малог истраживача. Даје му се могућност да се критички осврне на решење, да каже своје мишљење о томе што ће се десити са резултатом ако се промене улазни подаци, даје слобода да и само направи неку варијацију на анализирани задатак.

Препоручује се употреба игрица и мозгалица разних нивоа сложености за развој рефлекса и концентрације (на пример, икс-окс, тетрис,...).



У циљу стварања новог слогана у школској пракси да математика не треба и не сме да буде баук, пожељно је да у програм рада буду укључене презентације неких занимљивости типа:  $1 \times 9 + 2 = 11$ ,  $12 \times 9 + 3 = 111$ ,  $123 \times 9 + 4 = 1111$ ,  $1234 \times 9 + 5 = 11111$ ,  $12345 \times 9 + 6 = 111111$ ,  $123456 \times 9 + 7 = 1111111$ ,  $1234567 \times 9 + 8 = 11111111$ ,  $12345678 \times 9 + 9 = 111111111$ ,  $123456789 \times 9 + 10 = 1111111111$ . Ради развоја мотивације, треба одржати пажњу током целог процеса наставе. Презентација разних историјских занимљивости, занимљивих анегдота и садржаја још више ће ученику приближити дату тему. У обзир би дошла, на пример, прича о математичару и филозофу Питагори (582-496. п.н.е), чија теорема обележи математичко школовање свих основаца. Питагора је проучавао својства природних бројева (парни и непарни), савршени бројеви итд. Постојао је и најбољи од свих бројева, број 10 као збир прва четири природна броја ( $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ). Питагора је закључио и да збир углова у троуглу 180 степени итд. Оно на чему морамо инсистирати јесте повезаност теорије и праксе, односно стална популаризација математике. Да би охрабрили ученике да открију колико су математика и логика utkани у наш свакодневни живот и свет, можемо поставити питање, али и понудити одговор: Како доћи до правог угла на дечијем игралишту, парку, соби? Можемо демонстрирати прављење правоуглог троугла са страницама 3,4 и 5 неких мерних јединица и освежити практичну примену Питагорине теореме. Дакле, избором примера из учениковог окружења математика се интерпретира као животна дисциплина која помаже да решимо неке конкретне задатке, чиме се развија свест о универзалности математичког језика као средству комуникације.

### ЗАКЉУЧАК

Математика захтева логичко размишљање и повезивање ствари. Математички задатак се успешно решава само када се правилно препознају и искористе логички постављени услови задатка, који су у функцији решења. Математичка логика је свакако део природног дара или предиспозиције, али се може развити кроз разне облике рада почев од игре, квизова, такмичења и сл. Интернет као графички оријентисан медиј стоји у функцији таквог решења и сигурно нуди много забавнији, флексибилнији и ефикаснији приступ него што је то традиционални.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Радојевић П., Радојевић В., *Методика наставе математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, 1987.
- [2] Парезановић Д., *Интернет технологије у интанет окружењу почетне наставе математике*, Докторска дисертација (у изради), Учитељски факултет, Ужице, 2010.
- [3] Parezanović Duško, *Poslovni informacioni sistem obrazovnih institucija u intranet okruženju*, Info M, vol. 4, br. 14, str. 28-32, 2005.

- [4] Stefanović D., Parezanović D., Kaplarević A., *Poslovne i nastavne aktivnosti visokoškolskih ustanova u Internet okruženju*, Management - časopis za teoriju i praksu menadžmenta, vol. 5, br. 17-18, str. 44-51, 2000.
- [5] <http://matematika.mingl.org>
- [6] <http://sr.wikipedia.org>
- [7] <http://www.gsn.org>
- [8] <http://matematikaos.blogspot.com/>
- [9] Jones, S., *The internet goes to college: How students are living in the future with today's technology*, 2002.
- [10] Oblinger, D., *The Next Generation of Educational Engagement*. Journal of Interactive Media in Education, 2004 (8). Special Issue on the Educational Semantic Web. ISSN:1365-893X, [www.jime.open.ac.uk/2004/8](http://www.jime.open.ac.uk/2004/8)
- [11] Metcalf, D.S., *mLearning Innovations*. Webinar. March 29, 2007. Academic Impressions.
- [12] Dikovic Lj., *An Interactive Learning and Teaching of Linear Algebra by Web Technologies: Some Examples*, Journal the Teaching of mathematics, Publisher: The Mathematical Society of Serbia, Beograd, ISSN: 1451-4966, Issue: X\_2, Pages: 109 – 116., 2007
- [13] Dikovic Lj., *Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level*, Computer Science and Information Systems / ComSIS, vol. 6, br. 2, str. 191-203, 2009
- [14] <http://www.myplick.com/view/2NagJOynhIW/Internet-ufunkciji-ucenja-e-skripta>



Мр Душко Парезановић, Гимназија у Ивањици,  
Контакт: [duskop@ptt.rs](mailto:duskop@ptt.rs)  
Област интересовања: Методика наставе математике, Примена ICT у настави, e - Learning, e - Learning методика, Информациони системи



Проф. др Љубица Диковић, Висока пословно-техничка школа струковних студија у Ужицу  
Контакт: [dikoviclj@gmail.com](mailto:dikoviclj@gmail.com)  
Област интересовања: Високошколска настава математике, e – учење математике, Интернет технологије



Проф. др Крстивоје Шпијуновић, Учитељски факултет у Ужицу,  
Контакт: [ucfak@ptt.rs](mailto:ucfak@ptt.rs)  
Област интересовања: Методика наставе математике, Стваралачко, критичко и логичко мишљење, Математичка такмичења, Примена ICT у настави



Проф. др Миленко Пикула, Учитељски факултет у Ужицу,  
Контакт: [ucfak@ptt.rs](mailto:ucfak@ptt.rs)  
Област интересовања: Методика наставе математике, Примена ICT у настави, e - Learning, e - Learning методика